نکته‌هایی که باید به خاطر داشت

شرط برابری گشتاور نیرو و آهنگ تغییر تکانهٔ زاویه‌ای

فرد زیپ‌من
ترجمهٔ عبدالصاحب حسنی‌نژاد، صدیقه حسین‌پور

اشاره

معلوم شـــده اســـت که روش‌های حل دقیق و سریع بسیاری از مسائل اجســـام صلب را می‌توان با در نظر گرفتن گشتاور نسبت به مرکز لحظه‌ای دوران به‌دست آورد.

کلیدواژه‌ها: گشـــتاور، جســـم صلب، آهنگ تغییر تکانهٔ زاویه‌ای

I)

این مســـئله را اولین بار کروفـــورد[1] در *امریکن جورنال آو فیزیکز*[2] مطرح کرد[۱] و به‌دنبال آن بحثی که به‌وسیلهٔ زیپ من[۲][3]، کاکسر [۳و۴] و وین استوک[5] صورت گرفت[۵]، این پرسش را مطرح کرد، که در چه شرایطی گشتاور نیرو نسبت به یک نقطه (مانند P) که به‌طور لحظه‌ای ســـاکن اســـت، با آهنگ تغییر زمانی تکانهٔ زاویه‌ای مجاز برابر خواهد بود؟ پاسخ عمومی و درست را زیپ‌من و وین استوک داده‌اند. یعنی دقیقاً همان‌طـــوری که برای یک نقطه که به‌طور لحظه‌ای ســـاکن نیست، باید یکی از سه شرط (الف، ب یا پ) زیر صادق باشد، گشتاور نیرو نیز با آهنگ تغییر تکانهٔ زاویه‌ای برابر خواهد بود، اگر و تنها اگر:

الف) نقطهٔ P مرکز جرم دستگاه باشد.

ب) P دارای شـــتاب نباشد (نســـبت به یک دستگاه مرجع لخت).

پ) شـــتاب نقطهٔ P به طرف مرکز جرم یا در امتداد خارج آن باشد.

از شرط «پ» بسیار کم استفاده می‌شود زیرا وضعیت‌هایی که در آن شتاب دارای مشخصه‌های دلخواه (همان شرط پ) باشد به سادگی قابل تشـــخیص نیست. زیپ‌من در «مزایای آموزش خوب و درســـت، و روشنی اندیشـــه» [۲] پیشنهاد می‌کند که از شرط «پ» استفاده نشود، در حالی که دسلوج[6] عقیده دارد که «خواننده این حالت خاص را فراموش می‌کند و سادگی‌ای که ممکن است با در نظر گرفتن این حالت به‌دست آید بر خطاهای احتمالی می‌چربد» [۶]. بی‌گمان عدهٔ زیادی از کســـانی که با فیزیک کار دارند با دسلوج و زیپ‌من موافق هســـتند. به هر حال وقتی از نقطـــهٔ P در حرکت صفحه‌ای جسم صلب بر مرکز لحظه‌ای دوران منطبق شود، فرمول‌بندی دیگری از شـــرط «پ» به‌وجود می‌آید که کاربرد آن بســـیار ساده‌تر می‌شود و به‌طور اساســـی خطر اشتباه در آن از بین می‌رود. این فرمول‌بندی از ارزش قابل توجهی برخوردار است.

وقتی شرط «پ» برای مرکز لحظه‌ای به‌کار رود همانند آن اســـت که شرط ســـاده‌تر ثابت بودن فاصلهٔ مرکز لحظه‌ای از مرکز جرم در طول مدت حرکت را در نظر گرفته باشیم[۷]. مرکز لحظه‌ای دوران به‌عنوان نقطه‌ای از جسم صلب تعریف شـــده است یا جسم صلب چنان گســـترده شده است که در سکون لحظه‌ای به‌سر می‌برد. در حالت کلی مکان این نقطه در جسم صلب، ثابت و معین نیست. برای حرکت یک جسم صلب در صفحه می‌توان نشان داد که این نقطه همیشه وجود دارد (بـــه جز در حرکت انتقالیِ محـــض) [۸ و۹]. همان‌طور کـــه در بخش II ثابت خواهد شـــد، معادلـــه‌ای که متضمن فرمول‌بندی دیگری از شـــرط «پ» باشد به دو حالت جالب دیگر می‌انجامد که شاید در آن‌ها گشتاور نیرو با آهنگ تغییر زمانی تکانهٔ زاویه‌ای نســـبت به مرکز لحظه‌ای برابر باشد. در III و IV نشان داده می‌شود که این فرمول‌بندی غالباً با دقت و سرعت، به حل مسائلی می‌انجامد که شامل مسئلهٔ کروفورد و مسئلهٔ پیچیده‌تری از چرخ برون مرکزی* (چرخی که مرکز

جرمش بر مرکز هندســـی آن واقع نباشد) است که به وسیلهٔ زیپ‌من طرح شده است.

II) گشتاور نیرو نسبت به مرکز لحظه‌ای دوران

یک معادلهٔ عمومی و درســـت گشـــتاور نســـبت به مرکز لحظه‌ای دوران مربوط به حرکت صفحه‌ایِ جسم صلب است که معمولاً برای فیزیک‌دانان ناشناخته و عبارت است از:

$$\tau_c\omega = \frac{d}{dt}\left[\frac{I_c\omega^۲}{۲}\right] \qquad (۱)$$

در اینجـــا C نشـــانهٔ مرکـــز لحظـــه‌ای، τ_c و I_c به ترتیب گشتاورِخارجیِ محض و لختی دورانی نسبت به محوری است که از مرکز لحظه‌ای عمود بـــر صفحهٔ حرکت می‌گذرد و ω سرعتِ زاویه‌ایِ جسم صلب است. معادلهٔ (۱) از مساوی قرار دادن آهنگ انجام کار روی جسم صلب و آهنگ تغییر انرژی جنبشی به‌دســـت می‌آید. درســـتی این معادله ناشی از این واقعیت است که جسم در هر لحظه، در حرکتِ دورانیِ محض به دور نقطهٔ C اســـت. بنابراین انرژی جنبشی کل از معادلهٔ $\frac{I_c\omega^۲}{۲}$ به‌دســـت می‌آید. دقیقاً مانند آن است که جسم به دور محور ثابت در دوران باشـــد. طـــرف چپ معادلهٔ (۱) نیز به‌دلیل مشـــابهی عبارت است از آهنگ انجام کار روی جسم توسط نیروهای خارجی. (و در اینجا نیز دقیقاً مانند این است که جسم به‌دور یک محور ثابت دوران کند). با مشتق‌گیری و تقسیم دو طرف معادله به ω خواهیم داشت:

$$\tau_c = I_c\alpha + \frac{\omega \dot{I}_c}{۲} \qquad (۲)$$

که به‌عنوان معادله عمومی دربرگیرندهٔ گشـــتاورها نسبت به مرکز لحظه‌ای دوران اســـت [۱۰]. در اینجا $\alpha=\dot\omega$ شتاب زاویه‌ای جسم صلب اســـت. معادلهٔ (۲) بی‌درنگ ما را به سه حالت زیر راهنمایی می‌کند که می‌توان از معادلهٔ

$$\tau_c = I_c\alpha \qquad (۳)$$

استفاده کرد:

۱) I_c ثابت اســـت. ایـــن در حالتی رخ می‌دهـــد که مرکز لحظـــه‌ای دوران C در طول مدتِ حرکت، در فاصلهٔ ثابتی از مرکز جرم قرار بگیرد. همان‌طور که قبلاً گفته شد کاربرد این شرط خیلی ساده‌تر از کاربرد شرط «پ» است (که می‌گوید: شـــتاب نقطه‌ای از جســـم صلب که به‌طور لحظه‌ای بر نقطهٔ C منطبق اســـت به طرف مرکز جرم یـــا در امتداد خارج آن اســـت). برای مثال در مسئلهٔ آشـــنای میلهٔ یکنواخت، که به دیوار قائم و ســـطحی افقی تکیـــه دارد و دو انتهایش بر این سطح‌ها می‌لغزند، چون فاصله‌های مرکز لحظه‌ای و مرکز جرم ثابت هستند، بنابراین $\tau_c = I_c\alpha$ درست خواهد بود. یقیناً این تســـاوی درست است زیرا شرط شتاب «ب» نیز در اینجا سازگار است که به هیچ‌وجه به سادگی دیده نمی‌شود. مثال دیگری که در آن ثابت بودن I_c کاملاً روشن باشد عبارت است از چرخ یکنواختی که بر هر سطحی بدون لغزش می‌غلتد.

۲) شـــروع حرکت‌هـــا: وقتی که جســـم صلبـــی از حالت سکون شـــروع به حرکت کند همیشه می‌توان شتاب α را از $\tau_c = I_c\alpha$ به دست آورد.

۳) در نوسان‌های کوچک که شامل حالتی از تعادل پایدار یا حرکتِ یکنواخت باشد جملهٔ $\frac{\omega \dot{i}_c}{۲}$ نسبت به ω از درجهٔ دو خواهد بود و می‌توان آن را نادیده گرفت.

III) مثال‌ها

اگر چه هدف اصلی این مقاله مســـتلزم شرط‌هایی است که اســـتفاده از معادلهٔ (۳) را امکان‌پذیر می‌سازد، اما جالب است که نتیجه کلی- معادلهٔ (۲)- را برای دو مورد زیر به‌کار گیریم:

۱. مسئلهٔ اصلی کروفورد

۲. مثال زیپ‌من دربارهٔ چرخ برون مرکزی که بدون لغزش روی سطح افقی می‌غلتد.

۱. در مســـئلهٔ کروفورد [۱] میلهٔ صلب و یکنواختی به جرم m و طول $۲R$ اســـت که یک سر آن در تماس با سطحِ افقیِ بدون اصطکاک است و از حالت سکون رها می‌شود، (شکل ۱) θ زاویه میله با راســـتای قائم اســـت. در اینجا G مرکز جرم میله و P نقطهٔ تماس آن با ســـطح اســـت. از آنجا که G باید عمودی حرکت کند (G نخســـت ساکن است و هیچ نیروی افقی‌ای وجود ندارد) و P باید در امتداد افقی حرکت کند، به ســـادگی می‌توان نشان داد که نقطهٔ C در (شکل یک) مرکز لحظه‌ای دوران است [۱۱]. از قضیهٔ محورهای موازی داریم:

$$I_c = \frac{mR^۲}{۳} + mR^۲Sin^۲\theta$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\dot{I}_c = ۲mR^۲\dot\theta Sin\theta Cos\theta$$

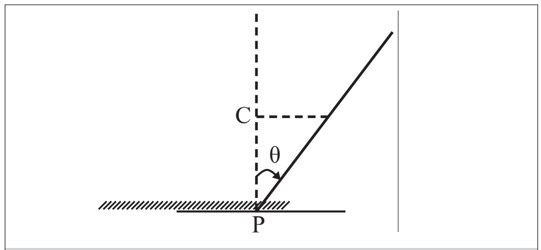
چون

$$\tau_c = mgRSin\theta$$

معادله(۲) بی‌درنگ به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود.

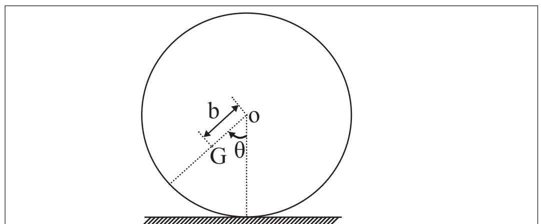
$$mgRSin\theta = \left(\frac{mR^۲}{۳} + mR^۲Sin^۲\theta\right)\ddot\theta + mR^۲\dot\theta^۲ \sin\theta Cos\theta \qquad (۴)$$

روشن است که این معادله با معادله‌های کروفورد و زیپ‌من یکســـان است. پس آشکار اســـت که معادله (۲) بی‌درنگ به دستاوردی درست راه می‌برد.



شکل ۱.

۲. شکل ۲، یک چرخ برون مرکزی به جرم m و شعاع R را نشان می‌دهد که بر روی سطح افقی بدون لغزش، می‌غلتد. نقطهٔ تماس C مرکز لحظه ای دوران چرخ است. همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، مرکز جرم G به فاصلهٔ b از مرکز چرخ O قرار دارد.



شکل ۲.

θ زاویهٔ بین خط OG و خط قائم است. در اینجا جالب است که روش‌های معمولی و عمومی را با معادله (۲) مقایسه کنیم. با در نظر گرفتن گشتاورها نسبت به مرکز جرم و به کارگیری قانون دوم نیوتون برای حرکتِ مرکز جرم- که نخست باید نیروهای عمودی و مالشی را به حساب آوریم، سپس آن‌ها را حذف کنیم- با انجام محاسبه‌های لازم معادلهٔ دیفرانسیلی برای θ، به شکل زیر به دست می‌آید:

$$-mgb\sin\theta = \left[I_\circ + m(R^2 - 2Rb\cos\theta)\right]\ddot{\theta} + mRb\dot{\theta}^2\sin\theta$$

ولی اگر گشتاورها را نسبت به مرکز لحظه‌ای در نظر بگیریم و از معادله (۲) استفاده کنیم بی‌درنگ این نتیجه را به‌دست می‌آوریم. روشن است که:

$$I_c = I_G + m\overline{GC}^2 = m\left[(b\sin\theta)^2 + (R - b\cos\theta)^2\right]$$

$$\Rightarrow I_c = I_\circ + m\left(R^2 - 2Rb\cos\theta\right)$$

و $\dot{I}_C = 2Rb\dot{\theta}\sin\theta$

از معادله (۲) همراه با $\tau_c = -mgb\sin\theta$ معادله (۵) به سادگی به دست می‌آید.

IV) چند مثال دیگر

از آنجا که معادله (۲) نتیجهٔ ساده‌ای از قضیهٔ کار - انرژی است، باید بتوانیم دستاوردهای بخش III را با استفاده از پایستگی انرژی به سادگی به‌دست آوریم. با نوشتن T+V=E که T، V،E به ترتیب انرژیِ جنبشی، پتانسیل و کل است برای مسئله اول از بخش III داریم:

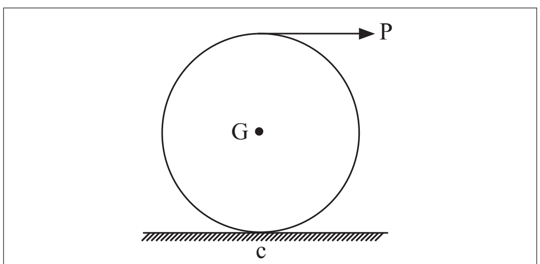
$$\left(\frac{mR^2}{3} + mR^2\sin^2\theta\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2} + mgR\cos\theta = E$$

که با مشتق‌گیری نسبت به زمان و تقسیم دو طرف به $\dot{\theta}$ بار دیگر به معادله (۴) که حل مسئلهٔ کروفورد است، می‌رسیم، به همین ترتیب برای معادله (۲) داریم (حل مسئلهٔ زیپمن):

$$\left[I_\circ + m\left[R^2 - 2Rb\cos\theta\right]\right]\frac{\dot{\theta}^2}{2} + mgb(1 - \cos\theta) = E$$

که با مشتق‌گیری نسبت به زمان و تقسیم دو طرفِ معادله بـه $\dot{\theta}$ بار دیگر بـه معادله (۵) یعنی حل مسئلهٔ زیپمن می‌رسیم. البته این راه و روش را می‌توان برای هر دستگاه پایستاری به‌کار برد. با این همه سادگی گاهی به کار بردن معادله (۲)، یا معادلهٔ (۳) در جایی که کاربرد دارد، ساده‌تر و راحت‌تر است. افزون بر این برای مسائلی که در آن‌ها نیروهای ناپایستار کار انجام می‌دهند معادلهٔ (۳) غالباً سریع‌ترین روش برای به‌دست آوردن جواب است. گاهی این روش آگاهی‌هایی نیز بـرای ما فراهم می‌کند که نمی‌توان با روش‌های دیگر به آن رسید. مسائل زیر را در نظر بگیرید:

۱. در شکل ۳ نخی به‌دور استوانهٔ همگن به جرم m و شعاع R پیچیده شده و با نیروی کشش P استوانه را بی‌آنکه بلغزد وادار به غلتش روی سطح افقی می‌کند.



شکل ۳.

شتاب زاویه‌ای α و شتاب مرکز جرم a_G را پیدا کنید (فرض کنید سطح به اندازه‌ای زبر و ناهموار است که از لغزش استوانه جلوگیری کند). گشتاورها را نسبت به مرکز لحظه‌ای C در نظر می‌گیریم (C در فاصلهٔ ثابتی از مرکز جرم است بنابراین نقطهٔ قابل اعتمادی است و خطر اشتباه وجود ندارد) حتی بدون اندیشیدن به جهت نیروی اصطکاک f می‌توانیم α را به‌دست آوریم:

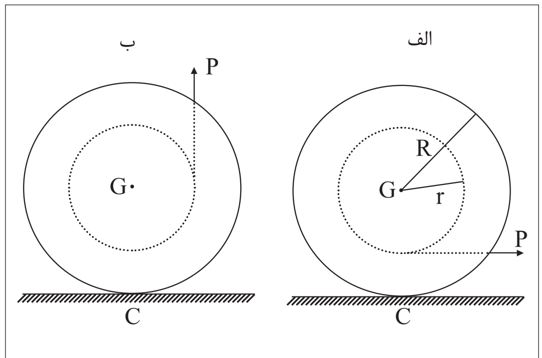
$$P(2R) = I_c\alpha = \frac{3}{2}mR^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{4P}{3mR}$$

$$\Rightarrow a_G = \alpha R = \frac{4P}{3m}$$

اکنون به سادگی معلوم می‌شود که نیروی اصطکاک f باید به‌طرف راست باشد و اندازه‌اش برابر با:

$$f = ma - p = ma_G - P = p/3$$

۲. شکل ۴ (الف) قرقره‌ای همگن به جرم m را نشان می‌دهد که شعاع آن R و شعاع نخ پیچ** آن r است. نخی روی قرقره پیچیده شده و با نیروی p قرقره را روی سطح افقی می‌کشد. اگر قرقره بدون لغزیدن بغلتد، شتاب زاویه‌ای α را پیدا کنید.

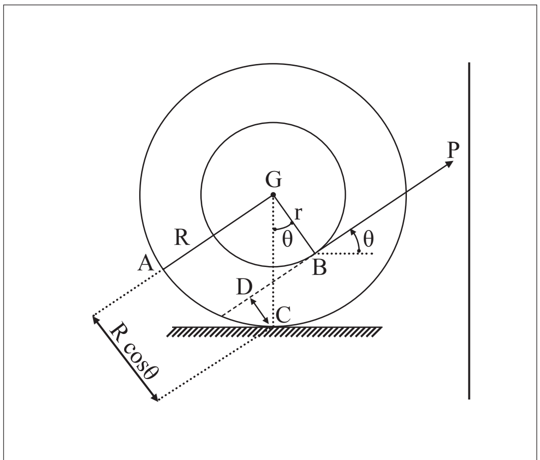


▲ شکل ۴.

در حالی که قرقره می‌غلتد آیا نخ از روی آن باز می‌شود یا روی آن می‌پیچد؟ برای شکل ۴ (ب) نیز به این پرسش‌ها پاسخ دهید. این بار نیز گشتاورها را نسبت به مرکز لحظه‌ای C در نظر می‌گیریم، نخ در حالت الف پیچیده می‌شود و در حالت ب باز می‌شود. شتاب زاویه‌ای در حالت (الف) از $P(R-r) = (I_G + mR^2)\alpha$ و در حالت (ب) از $Pr = (I_G + mR^2)\alpha$ به‌دست می‌آید.

۳. نخ به دور قرقره می‌پیچد، اگر نیروی P افقی باشد (شکل ۴ الف) باز می‌شود اگر نیرو عمودی باشد (شکل ۴ ب) بنابراین باید یک زاویهٔ تراگذر (انتقال) مانند θ_t وجود داشته باشد که در آن زاویه، قرقره حرکت تراگذری دارد. این زاویه را پیدا کنید.

این حالت برای یک زاویه دلخواه θ بین نخ و سطح افقی در شکل ۵ نشان داده شده است. با گرفتن گشتاورها نسبت به مرکز لحظه‌ای C بی‌درنگ روشن خواهد شد که شتاب زاویه‌ای α با معادله زیر داده می‌شود: $P(R\cos\theta - r) = (I_G + mR^2)\alpha$ که نشان می‌دهد اگر $\cos\theta \succ r/R$ باشد α پادساعتگرد است و نخ باز می‌شود. روشن است که زاویهٔ تراگذر برابر با $\cos\theta_t = r/R$ است. این نتیجه در شکل پنج نمایان است که نشان می‌دهد برای $\theta = \theta_t$ گشتاور نسبت به C و شتاب زاویه‌ای هر دو صفرند. با آنکه روش‌های دیگری برای پرداختن به این مسئله وجود دارد ولی هیچ یک از آن‌ها سادگی و سرعتِ روش حل که در اینجا استفاده شده است ندارد.



▲ شکل ۵. قرقره همگن بر اثر کشش P بدون لغزش می‌غلتد. بازوی گشتاور d به دور C عبارت است از:
$d = CD = R\cos\theta - r$

V) نوسان‌های کوچک

از نتایج به‌دست آمده برای مسئله‌های زیپ‌منِ و کروفورد در بخش III دیده می‌شود که مقدار اولیهٔ $\ddot{\theta}$ کاملاً معادله (۳) داده می‌شود (این مقدار اولیه از معادله‌های ۴ و ۵ با گذاشتن $\theta = 0°$ به‌دست می‌آید). پس این‌ها می‌توانند به‌عنوان مثال‌هایی باشند از کاربرد درست معادلهٔ (۳) برای حرکت‌هایی که از سکون شروع می‌شوند (حالت ۲ از بخش II). به هر حال، حالت ۳ از بخش II (نوسان‌های کوچک) نیز به اندازه‌ای جالب و مفید است که یک مثال برای آن می‌آوریم. پوستهٔ همگن نیمه استوانه‌ای به جرم m و شعاع R را در نظر بگیرید. اگر این پوسته را از طرف خمیده روی سطح بدونِ اصطکاک قرار دهیم و کمی آن را از حالت تعادل خود جابه‌جا و رها کنیم دورهٔ تناوب یک نوسان کوچک آن چقدر خواهد بود.

شکل ۶ پوسته را در لحظه‌ای از حرکت نشان می‌دهد که شعاعی که از مرکز جرم G می‌گذرد با امتداد قائم زاویهٔ θ می‌سازد. از آنجا که G باید در امتداد قائم حرکت کند و نقطهٔ تماس P در امتداد افقی، نقطهٔ C مرکز لحظه‌ای خواهد بود [۱۱]. فاصلهٔ d بین دو نقطهٔ O و G به سادگی به‌دست می‌آید و برابر $2R/\pi$ است. از قضیهٔ محورهای موازی داریم:

$$I_G = mR^2 - md^2 \quad \text{و} \quad I_c = I_G + m(d\sin\theta)^2$$
$$= mR^2 - md^2\cos^2\theta$$
$$= mR^2 - md^2$$
$$\because \theta \prec\prec 1\,\text{rad} \Rightarrow \cos\theta \simeq 1$$
$$\therefore I_C \simeq mR^2 - m\left[\frac{2R}{\pi}\right]^2 = mR^2(\pi^2 - 4)/\pi^2$$
$$\left[R^2\left(\pi^2 - 4\right)/\pi^2\right]\ddot{\theta} + \left[2Rg/\pi\right]\theta = 0$$

چون $\tau c = -mgd\sin\theta = -mg(\frac{2R}{\pi})\theta$ برابری(۳)

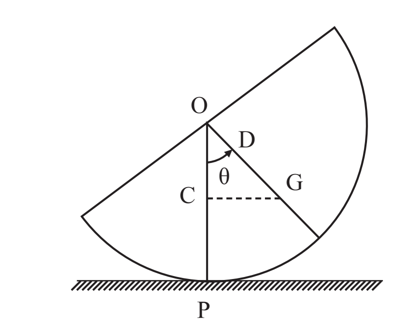
معلوم شده است که روش‌های حل دقیق و سریع بسیاری از مسائل اجسام صلب را می‌توان با در نظر گرفتن گشتاور نسبت به مرکز لحظه‌ای دوران به‌دست آورد

این نتیجه را می‌دهد که:

$$\left[R^{2}\left(\pi^{2}-4\right)/\pi^{2}\right]\ddot{\theta}+\left[2Rg/\pi\right]\theta=0$$

$$\Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{\left(\pi^{2}-4\right)/\pi^{2}}{2g/R}}$$

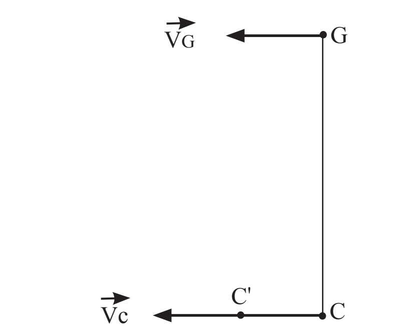
$$\tau_c = I_c\alpha$$



شکل ۶.

شکل ۷ مرکز جرم و مرکز لحظه‌ای دوران یک جسم صلب را در لحظهٔ t نشان می‌دهد. چون G در لحظهٔ t به دور نقطهٔ C می‌چرخد، سرعت آن $\tau_c = I_c\alpha$ در t همان‌گونه که شکل نشان می‌دهد باید عمود بر GC باشد. همچنین چون فاصلهٔ GC در اینجا ثابت فرض شده است سرعت نقطهٔ C نسبت به G نمی‌تواند مؤلفه‌ای در امتداد GC داشته باشد. بنابراین سرعت $\vec{V_C}$ نیز باید مانند شکل باشد. (در اینجا توجه به این نکته مهم است: در حالی‌که سرعت نقاطی از جسم که به‌طور لحظه‌ای بر C منطبق می‌شوند صفر است این امر برای خود نقطهٔ C درست نیست. مرکز لحظه‌ای C نه به جسم چسبیده و نه در فضا ثابت نگه داشته شده است. این نقطه کاملاً مسیر خود را می‌پیماید).

مکان مرکز لحظه‌ای بعد از گذشت زمان بسیار کوچک با C' مشخص شده است. جابه‌جایی CC' باید عمود برخط GC باشد. نقطهٔ P از جسم صلب که در زمان t بر نقطهٔ C منطبق است در زمان $t+\delta t$ نیز بر نقطهٔ C منطبق است زیرا این نقطه در زمان t دارای سرعتِ صفر است. ولی در $t+\delta t$



شکل ۷.

نقطهٔ p (همراه با بقیهٔ جسم صلب) به‌دور C' می‌چرخد پس این نقطه سرعتی عمود بر خطِ CC' دارد (در $t+\delta t$ نقطه‌ای از جسم مثلاً Q وجود دارد که به‌طور لحظه‌ای ساکن است و بنابراین بر C' منطبق می‌شود). در نتیجه شتاب نقطهٔ P در زمان t باید در راستای GC باشد و این نشان می‌دهد که اگر فاصلهٔ مرکز لحظه‌ای از مرکز جرم در طول حرکت ثابت بماند، شتاب نقطه‌ای از جسم که در یک لحظه در جای مرکز لحظه‌ای است، باید همان‌گونه که ثابت شد، خطی باشد که آن را به مرکز جرم وصل کند [۱۲].

VI) نتیجه‌گیری

شایسته است که با تکرار و تأکید خود بر عدم توافق با زیپمن و دسلوج در مورد سادگیِ حاصل از نادیده گرفتنِ شرط «پ» نتیجه‌گیری کنیم. مرکز لحظه‌ای دوران، همان‌گونه که در این مقاله بحث شد، حالت ویژه‌ای از شرط ویژهٔ دسلوج یعنی شرط «پ» است و ما نشان دادیم که با در نظر گرفتن گشتاورها نسبت به مرکز لحظه‌ای، می‌توان بسیاری از مسائل را به سادگی حل کرد. همچنین نشان دادیم که مسائلی وجود دارند که روش ارائه شده در این مقاله دید روشنی از آن‌ها دارد که در روش‌های معمول این بینش و نگرش وجود ندارد. افزون بر این، شرطی را می‌توان برای مرکز لحظه‌ای قرار داد تا معادله $\tau_c = I_c\alpha$ به سادگی برقرار گردد. (برخلاف فرمول‌بندی معمول شرط «پ») و بی‌گمان احتمال اشتباه در آن وجود ندارد. گشتاورها نسبت به مرکز لحظه‌ای، یک فرصت هستند، فرصت را از دست ندهید و آن را غنیمت شمارید!

پی‌نوشت‌ها

* **Eccentric wheel**

** نخ پیچ قرقره (قسمتی از قرقره که نخ روی آن پیچیده می‌شود). peg

1. Craw ford
2. American journal of physics
3. Zypman
4. Kacser
5. Wein stock
6. Desloge

منابع

1.Frank S. Crawford, "Moments to remember." Am. J. Phys. 57, 105, 177(1989).

2.Fredy R. Zypman, "Moments to remember-The condition for equating torque and rate of change of angular momentum." Am.J. Phys. **58**,41,43(1990).

3. Claude Kacser, "Are deliberate mistakes a valid teaching tool?" Am.J. Phys. **57**,583 (1989).

4.Claude Kacser, "About which moving or accelerating points may dynamical moments validly be taken?- Errors unintentional." Am. J. Phys. **57**, 1063(1989).

5. Robert Weinstock, "Errors intentional and otherwise." Am. J. Phys. **57**,1063 (1989).

6. Edward A. Desloge. Classical Mechanics (wiley, New York. 1982), p 230.

۷. اثبات مختصری از این حکم در پیوست آمده است. اثباتی هم ارز در کتاب زیر داده شده است:
William F.Osgood. Mechanics (Macmillan, New York. 1949), pp.164, 207.

8. See for example, Robert A. Becker, Introduction to Theoretical Mechanics (McGraw- Hill, New York. 1954), pp. 194- 195. John L. Synge and Byron A. Griffith, Principles of Mechanics (McGraw- Hill, New York. 1949), pp.122-124.

۹. برای بعضی از روش‌های جالبِ دیداری کردن (به روش تصویربرداری) مرکز لحظه‌ای دوران چرخی که بدون لغزیدن در حال حرکت است مرجع زیر را ببینید:
P.L.Tea, Jr., "On seeing instantaneous centers of velocity." Am. J. Phys. **58**, 495-497 (1099).

10. See for example, A.S. Ramsey, Dynamics, Part I (Cambridge U.P., Cambridge, England, 1959),2nd ed., p.240; Brian H. Engineers and Scientists, Volume 3, Theoretical Mechanics (Pergamon, New York, 1963), pp.278-280.

۱۱. از آنجا که جسم در هر لحظه در حال حرکت دورانی به‌دور مرکز لحظه‌ای است روشن است که سرعت هر نقطه از جسم باید بر خط و اصل آن نقطه به مرکز لحظه‌ای عمود باشد. اگر جهت سرعت‌های دو نقطه در یک لحظهٔ معین t معلوم باشد (سرعت‌ها موازی نیستند)، مرکز لحظه‌ای در لحظهٔ t نقطهٔ اشتراک دو خطی است که از آن نقاط عمود بر سرعت‌ها رسم شود.

۱۲. این‌جانب مدیون پروفسور Harry Soodak به‌خاطر ارائهٔ این اثبات ساده هستم.